Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Berechenbarkeit und Logik
WS 2025/2026

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Seien P und R ein- bzw. zweistellige Relationssymbole und f ein einstelliges Funktionssymbol. Welche der folgenden Ausdrücke sind prädikatenlogische Formeln?

$$\text{(a) } \exists x \neg P(x) \quad \text{(b) } \forall x \forall y (R(x,y) \to f(R(x,y))) \quad \text{(c) } f(x) = f(x)$$

$$\text{(d) } \forall n \exists p \exists q\, n = p \cdot q \quad \text{(e) } \exists x \forall y (P(y) \vee \neg \forall x R(x, f(x))) \quad \text{(f) } P(x) \quad \text{(g) } f(f(x))$$

Aufgabe 2. Gegeben sei $F = (Q(x) \vee \exists x \forall y (P(f(x), y) \wedge Q(a))) \vee \forall x R(x, z, g(x))$.

(a) Geben Sie alle Teilformeln und Terme an, die in der Formel F vorkommen.

(b) Welche dieser Teilformeln sind Aussagen?

(c) Geben Sie für jede Variable an, ob sie frei oder gebunden in F vorkommt.

(d) Geben Sie die Matrix von F an.

Aufgabe 3. Sei $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{N}})$ die Struktur mit den Funktionssymbolen $+$ und $\cdot$, welche ihre übliche Bedeutung haben sollen. Formalisieren Sie die folgenden Eigenschaften durch prädikatenlogischen Formeln so, dass sie in $\mathcal{N}$ ihre übliche Bedeutung erhalten.

$$\text{(a) } x = 0 \quad \text{(b) } x = 1 \quad \text{(c) } x < y \quad \text{(d) } x \bmod y = z \quad \text{(e) } x \text{ ist prim}$$

Aufgabe 4. Gegeben seien ein zweistelliges Funktionssymbol f und ein zweistelliges Relationssymbol R. Betrachten Sie die folgenden drei Strukturen:

- $\mathcal{C} = (\{0,1,2\}, I_{\mathcal{C}})$, wobei $f^{\mathcal{C}}(x,y) = x$, $R^{\mathcal{C}} = \{(0,1),(1,2),(2,0)\}$,
- $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I_{\mathcal{N}})$, wobei $f^{\mathcal{N}}(x,y) = x \cdot y$, $R^{\mathcal{N}} = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\}$,
- $\mathcal{P} = (2^{\mathbb{N}}, I_{\mathcal{P}})$, wobei $f^{\mathcal{P}}(x,y) = x \cap y$, $R^{\mathcal{P}} = \{(x,y) \in 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \mid x \subseteq y\}$.

In welchen der Strukturen gelten jeweils die folgenden Aussagen?

$$\text{(a) } \exists x \forall y R(y,x) \qquad \text{(b) } \forall x \forall y (R(x,y) \vee R(y,x))$$

$$\text{(c) } \forall x \forall y \forall z \forall w ((R(x,y) \wedge R(z,w)) \to R(f(x,z), f(y,w)))$$