Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Seien P und R ein- bzw. zweistellige Relationssymbole und f ein einstelliges Funktionssymbol. Welche der folgenden Ausdrücke sind prädikatenlogische Formeln?

(a) $\exists x \neg P(x)$ (b) $\forall x \forall y (R(x, y) \to f(R(x, y)))$ (c) $f(x) = f(x)$

(d) $\forall n \exists p \exists q \, n = p \cdot q$ (e) $\exists x \forall y (P(y) \vee \neg \forall x R(x, f(x)))$ (f) $P(x)$ (g) $f(f(x))$

Lösung.

(a) **Ja.**

(b) **Nein.** Der Ausdruck $R(x, y)$ ist eine Formel und $f(R(x, y))$ ist damit keine Formel.

(c) **Ja.** Siehe Folie 315 zur Konvention bzgl. Gleichheit.

(d) **Nein.** Das Symbol “ $\cdot$ ” ist hier nicht definiert.

(e) **Ja.**

(f) **Ja.**

(g) **Nein.** Der Ausdruck ist nur ein Term.

Aufgabe 2. Gegeben sei $F = (Q(x) \vee \exists x \forall y (P(f(x), y) \wedge Q(a))) \vee \forall x R(x, z, g(x))$.

(a) Geben Sie alle Teilformeln und Terme an, die in der Formel F vorkommen.

(b) Welche dieser Teilformeln sind Aussagen?

(c) Geben Sie für jede Variable an, ob sie frei oder gebunden in F vorkommt.

(d) Geben Sie die Matrix von F an.

Lösung.

(a) Die vorkommenden Terme sind x, $f(x)$, y, a, z und $g(x)$. Die atomaren Teilformeln sind $Q(x)$, $P(f(x), y)$, $Q(a)$ und $R(x, z, g(x))$. Die restlichen Teilformeln sind, neben F selbst, die folgenden Formeln:

$$P(f(x), y) \wedge Q(a), \quad \forall y (P(f(x), y) \wedge Q(a)), \quad \exists x \forall y (P(f(x), y) \wedge Q(a)),$$
$$Q(x) \vee \exists x \forall y (P(f(x), y) \wedge Q(a)), \quad \forall x R(x, z, g(x)).$$

(b) Die Teilformeln $Q(a)$ und $\exists x \forall y (P(f(x), y) \wedge Q(a))$ sind Aussagen. (Hierbei nehmen wir an, dass a eine Konstante bezeichnet und, dass z eine Variable bezeichnet.)

(c) Das x in $Q(x)$ und z sind frei, alle anderen Variablen sind gebunden.

(d) Die Matrix von F ist $F^* = (Q(x) \vee (P(f(x), y) \wedge Q(a))) \vee R(x, z, g(x))$.

Aufgabe 3. Sei $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I_\mathcal{N})$ die Struktur mit den Funktionssymbolen $+$ und $\cdot$, welche ihre übliche Bedeutung haben sollen. Formalisieren Sie die folgenden Eigenschaften durch prädikatenlogischen Formeln so, dass sie in $\mathcal{N}$ ihre übliche Bedeutung erhalten.

(a) $x = 0$ (b) $x = 1$ (c) $x < y$ (d) $x \bmod y = z$ (e) x ist prim

Lösung. Wir verwenden die Eigenschaften aus vorherigen Aufgabenteilen in kurzer Form.

(a) $\forall y(x + y = y)$ [Quantorenfreie Alternative: $x + x = x$]

(b) $\forall y(x \cdot y = y)$ [Quantorenfreie Alternative: $(x \cdot x = x) \wedge (x + x \neq x)$]

(c) $\exists u((x + u = y) \wedge (u \neq 0))$

(d) $\exists q(x = y \cdot q + z) \wedge (z < y)$

(e) $\forall p((x \bmod p = 0) \rightarrow (p = 1) \vee (p = x)) \wedge (x > 1)$

Aufgabe 4. Gegeben seien ein zweistelliges Funktionssymbol f und ein zweistelliges Relationssymbol R. Betrachten Sie die folgenden drei Strukturen:

- $\mathcal{C} = (\{0, 1, 2\}, I_\mathcal{C})$, wobei $f^\mathcal{C}(x, y) = x$, $R^\mathcal{C} = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}$,
- $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, I_\mathcal{N})$, wobei $f^\mathcal{N}(x, y) = x \cdot y$, $R^\mathcal{N} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\}$,
- $\mathcal{P} = (2^\mathbb{N}, I_\mathcal{P})$, wobei $f^\mathcal{P}(x, y) = x \cap y$, $R^\mathcal{P} = \{(x, y) \in 2^\mathbb{N} \times 2^\mathbb{N} \mid x \subseteq y\}$.

In welchen der Strukturen gelten jeweils die folgenden Aussagen?

(a) $\exists x \forall y R(y, x)$ (b) $\forall x \forall y(R(x, y) \vee R(y, x))$

(c) $\forall x \forall y \forall z \forall w((R(x, y) \wedge R(z, w)) \rightarrow R(f(x, z), f(y, w)))$

Lösung.

(a) Sei mit F die gegebene Formel bezeichnet. Die zugehörige Aussage besagt, dass es ein größtes Element bezüglich der Relation R gibt.

- Es gilt $\mathcal{C} \not\models F$, denn wir finden für jedes x ein y, sodass $R(y, x)$ nicht gilt:

$$\mathcal{C}_{[x/0][y/1]} \not\models R(y, x),\ \mathcal{C}_{[x/1][y/2]} \not\models R(y, x) \text{ und } \mathcal{C}_{[x/2][y/0]} \not\models R(y, x).$$

- Es gilt $\mathcal{N} \not\models F$, denn es gibt keine größte natürliche Zahl: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathcal{C}_{[x/n][y/n+1]} \not\models R(y, x).$$

- Es gilt $\mathcal{P} \models F$, denn die natürlichen Zahlen haben eine größte Teilmenge:

$$\mathcal{P}_{[x/\mathbb{N}]} \models \forall y R(y, x).$$

(b) Sei wieder mit F die gegebene Formel bezeichnet. Die zugehörige Aussage besagt diesmal, dass die Relation R total ist.

- Es gilt $\mathcal{C} \not\models F$, denn es gilt $\mathcal{C}_{[x/0][y/0]} \not\models (R(x, y) \lor R(y, x))$.
- Es gilt $\mathcal{N} \models F$, denn für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $\mathcal{N}_{[x/n][y/m]} \models (R(x, y) \lor R(y, x))$.
- Es gilt $\mathcal{P} \not\models F$, denn es gilt $\mathcal{P}_{[x/\{0\}][y/\{1\}]} \not\models (R(x, y) \lor R(y, x))$.

(c) Sei wieder mit F die gegebene Formel bezeichnet.

- Es gilt $\mathcal{C} \models F$: Seien $a, b, c, d \in \{0, 1, 2\}$ mit $(a, b), (b, c) \in R^{\mathcal{C}}$. Dann folgt wegen $f^{\mathcal{C}}(a, c) = a$ und $f^{\mathcal{C}}(b, d) = b$, dass $(f^{\mathcal{C}}(a, c), f^{\mathcal{C}}(b, d)) = (a, b) \in R^{\mathcal{C}}$.
- Es gilt $\mathcal{N} \models F$: Für $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ mit $a \leq b$ und $c \leq d$ gilt $a \cdot c \leq b \cdot d$.
- Es gilt $\mathcal{P} \models F$: Für $A, B, C, D \subseteq \mathbb{N}$ mit $A \subseteq B$ und $C \subseteq D$ gilt $A \cap C \subseteq B \cap D$.