

## Übungsblatt 12

**Aufgabe 1.** Beweisen Sie die gegebenen Folgerungen für beliebige Formeln  $F$  und  $G$ . Entscheiden Sie zudem, ob auch die umgekehrten Folgerungen jeweils richtig sind.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \exists x(F \vee G) &\models \exists xF \vee \exists xG & \text{(b)} \quad \exists x(F \wedge G) &\models \exists xF \wedge \exists xG \\ \text{(c)} \quad \forall x(F \rightarrow G) &\models \forall xF \rightarrow \forall xG \end{aligned}$$

**Aufgabe 2.** Zeigen Sie, dass folgende Formeln erfüllbar, aber nicht gültig sind.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad F &= \forall y \exists x (f(x) = y) \\ \text{(b)} \quad G &= \forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y) \\ \text{(c)} \quad H &= \exists y \forall x (f(x) = g(x, y)) \wedge \exists x (f(x) \neq g(x, x)) \end{aligned}$$

**Aufgabe 3.** Entscheiden Sie für die folgenden Formeln jeweils, ob diese gültig sind, unerfüllbar sind, oder erfüllbar, aber nicht gültig sind.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad F &= \forall x \exists y (P(x) \rightarrow P(y)) & \text{(b)} \quad G &= \forall x (R(x, y) \wedge f(x) = y) \\ \text{(c)} \quad H &= \forall x R(x, x) \wedge \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow S(x, y)) \wedge \forall x \forall y (S(x, y) \rightarrow R(x, y)) \wedge \neg R(a, b) \end{aligned}$$

**Aufgabe 4.** Geben Sie für die folgende Formel  $F$  zunächst eine äquivalente BPF an, und überführen Sie diese dann anschließend in Skolemform.

$$F = \forall x \exists y (R(x, y) \rightarrow \exists r R(r, f(y, z))) \wedge \forall x \neg \exists z (P(z) \wedge \forall w R(x, w))$$