Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Beweisen Sie die gegebenen Folgerungen für beliebige Formeln F und G. Entscheiden Sie zudem, ob auch die umgekehrten Folgerungen jeweils richtig sind.

(a) $\exists x(F \vee G) \models \exists xF \vee \exists xG$ (b) $\exists x(F \wedge G) \models \exists xF \wedge \exists xG$

(c) $\forall x(F \to G) \models \forall xF \to \forall xG$

Lösung.

(a) Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $\exists x(F \vee G)$. Dann ein existiert $a \in U_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/a]} \models F \vee G$. Somit gilt $\mathcal{A}_{[x/a]} \models F$ oder $\mathcal{A}_{[x/a]} \models G$, also $\mathcal{A} \models \exists xF$ bzw. $\mathcal{A} \models \exists xG$. Wir folgern:

$$\mathcal{A} \models \exists xF \vee \exists xG.$$

Ist umgekehrt $\mathcal{A}$ ein Modell für $\exists xF \vee \exists xG$, dann existiert $a \in U_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/a]} \models F$ oder es existiert $a \in U_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/a]} \models G$. In beiden Fällen gilt $\mathcal{A}_{[x/a]} \models F \vee G$, also

$$\mathcal{A} \models \exists x(F \vee G).$$

Die beiden Aussagen sind also logisch äquivalent, d.h. $\exists x(F \vee G) \equiv \exists xF \vee \exists xG$.

(b) Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $\exists x(F \wedge G)$. Dann ein existiert $a \in U_\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_{[x/a]} \models F \wedge G$. Somit gilt $\mathcal{A}_{[x/a]} \models F$ und $\mathcal{A}_{[x/a]} \models G$, also $\mathcal{A} \models \exists xF$ und $\mathcal{A} \models \exists xG$. Wir folgern:

$$\mathcal{A} \models \exists xF \wedge \exists xG.$$

Umgekehrt betrachten wir die Struktur $\mathcal{B}$ mit $U_\mathcal{B} = \{0, 1\}$ und der einstelligen Relation $\varphi^\mathcal{B} = \{1\} \subseteq U_\mathcal{B}$, sowie die Formeln $F = \varphi(x)$ und $G = \neg\varphi(x)$. Es gilt dann $\mathcal{B} \models \exists xF \wedge \exists xG$ wegen $\mathcal{B}_{[x/1]} \models F$ und $\mathcal{B}_{[x/0]} \models G$. Allerdings existsiert natürlich kein $a \in U_\mathcal{B}$, für das gleichzeitig $\varphi^\mathcal{B}(a)$ und $\neg\varphi^\mathcal{B}(a)$ gilt. Wir erhalten:

$$\mathcal{B} \not\models \exists x(F \wedge G).$$

(c) Sei $\mathcal{A}$ ein Modell für $\forall x(F \to G)$. Dann gilt für alle $a \in U_\mathcal{A}$ stets $\mathcal{A}_{[x/a]} \models F \to G$. Gilt nun $\mathcal{A}_{[x/a]} \models F$ für ein beliebiges $a \in U_\mathcal{A}$, dann folgt hieraus stets $\mathcal{A}_{[x/a]} \models G$. Falls also $\mathcal{A} \models \forall xF$ gilt, dann gilt auch $\mathcal{A} \models \forall xG$. Wir folgern:

$$\mathcal{A} \models \forall xF \to \forall xG.$$

Um zu sehen, dass die Umkehrung hier nicht gilt, betrachten wir die Struktur $\mathcal{B}$, sowie die Formeln F und G aus Aufgabenteil (c). Es gilt $\mathcal{B}_{[x/0]} \not\models F$, also $\mathcal{B} \not\models \forall xF$ und somit $\mathcal{B} \models \forall xF \to \forall xG$. Allerdings gilt $\mathcal{B}_{[x/1]} \not\models F \to G$. Wir erhalten:

$$\mathcal{B} \not\models \forall x(F \to G).$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass folgende Formeln erfüllbar, aber nicht gültig sind.

(a) $F = \forall y \exists x (f(x) = y)$

(b) $G = \forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$

(c) $H = \exists y \forall x (f(x) = g(x,y)) \wedge \exists x (f(x) \neq g(x,x))$

Lösung.

(a) Die Formel F besagt, dass die Funktion f surjektiv ist. Es gilt $\mathcal{A} \models F$ für die Struktur $\mathcal{A}$ mit $U_{\mathcal{A}} = \{0\}$ und $f^{\mathcal{A}}(x) = 0$. Somit ist F erfüllbar. Für die Struktur $\mathcal{B}$ mit $U_{\mathcal{B}} = \{0,1\}$ und $f^{\mathcal{B}}(x) = 0$ gilt hingegen $\mathcal{B} \not\models F$. Also ist F nicht gültig.

(b) Die Formel G besagt, dass die Funktion f injektiv ist. Für die Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ aus Aufgabenteil (a) gilt $\mathcal{A} \models G$ und $\mathcal{B} \not\models G$. Also ist G erfüllbar, aber nicht gültig.

(c) Sei $\mathcal{A}$ gegeben durch $U_{\mathcal{A}} = \{0,1\}$, sowie $f^{\mathcal{A}}(x) = x$, $g^{\mathcal{A}}(x,0) = x$ und $g^{\mathcal{A}}(x,1) = 0$. Dann gilt $\mathcal{A}_{[y/0]} \models \forall x (f(x) = g(x,y))$ und somit $\mathcal{A} \models \exists y \forall x (f(x) = g(x,y))$. Außerdem gilt $\mathcal{A} \models \exists x (f(x) \neq g(x,x))$ wegen $\mathcal{A}_{[x/1]} \not\models (f(x) \neq g(x,x))$. Insgesamt gilt also $\mathcal{A} \models H$, was zeigt, dass H erfüllbar ist.

Um zu zeigen, dass H nicht gültig ist, betrachten wir die Struktur $\mathcal{B}$ mit $U_{\mathcal{B}} = \{0\}$, sowie $f^{\mathcal{B}}(x) = 0$ und $g^{\mathcal{B}}(x,y) = 0$: Wegen $\mathcal{B} \not\models \exists x (f(x) \neq g(x,x))$ gilt $\mathcal{B} \not\models H$.

Aufgabe 3. Entscheiden Sie für die folgenden Formeln jeweils, ob diese gültig sind, unerfüllbar sind, oder erfüllbar, aber nicht gültig sind.

(a) $F = \forall x \exists y (P(x) \rightarrow P(y))$ (b) $G = \forall x (R(x,y) \wedge f(x) = y)$

(c) $H = \forall x R(x,x) \wedge \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow S(x,y)) \wedge \forall x \forall y (S(x,y) \rightarrow R(x,y)) \wedge \neg R(a,b)$

Lösung.

(a) **Gültig.** Sei $\mathcal{A}$ eine zu F passende Struktur und sei $a \in U_{\mathcal{A}}$ beliebig. Dann gilt

$$\mathcal{A}_{[x/a][y/a]} \models (P(x) \rightarrow P(y)), \text{ und somit } \mathcal{A}_{[x/a]} \models \exists y (P(x) \rightarrow P(y)).$$

Da dies füe alle $a \in U_{\mathcal{A}}$ der Fall ist, können wir $\mathcal{A} \models F$ schließen.

(b) **Erfüllbar, aber nicht gültig.** Sei die Struktur $\mathcal{A}$ gegeben durch

$$U_{\mathcal{A}} = \{0\}, \quad y^{\mathcal{A}} = 0, \quad f^{\mathcal{A}}(x) = x \quad \text{und} \quad R^{\mathcal{A}} = U_{\mathcal{A}} \times U_{\mathcal{A}}.$$

Dann gilt $\mathcal{A} \models G$. Umgekehrt erhalten wir durch

$$U_{\mathcal{B}} = \{0\}, \quad y^{\mathcal{B}} = 0, \quad f^{\mathcal{B}}(x) = x \quad \text{und} \quad R^{\mathcal{B}} = \emptyset$$

eine zu G passende Struktur $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B} \not\models G$.

(c) **Unerfüllbar.** Wir nehmen an, $\mathcal{A}$ sei eine zu H passende Struktur mit $\mathcal{A} \models H$. Wegen $\mathcal{A} \models \neg R(a,b)$, muss $(a^\mathcal{A}, b^\mathcal{A}) \notin R^\mathcal{A}$ gelten. Aus $\mathcal{A} \models \forall x R(x,x)$ können wir schließen, dass $a^\mathcal{A} \neq b^\mathcal{A}$. Wegen $\mathcal{A} \models \forall x \forall y (x \neq y \to S(x,y))$ folgt $(a^\mathcal{A}, b^\mathcal{A}) \in S^\mathcal{A}$. Mithilfe von $\mathcal{A} \models \forall x \forall y (S(x,y) \to R(x,y))$ folgt dann aber auch $(a^\mathcal{A}, b^\mathcal{A}) \in R^\mathcal{A}$, was ein Widerspruch zu $(a^\mathcal{A}, b^\mathcal{A}) \notin R^\mathcal{A}$ ist. Also kann $\mathcal{A} \models H$ nicht gelten.

Aufgabe 4. Geben Sie für die folgende Formel F zunächst eine äquivalente BPF an, und überführen Sie diese dann anschließend in Skolemform.

$$F = \forall x \exists y \big(R(x,y) \to \exists r R(r, f(y,z))\big) \land \forall x \neg \exists z \big(P(z) \land \forall w R(x,w)\big)$$

Lösung. Der Beweis zum Satz auf Folie 329 (Für jede Formel gibt es eine äquivalente Formel in BPF) wurde per Induktion über den Formelaufbau geführt. Wir verwenden hier stattdessen einen globalen Ansatz, um die BPF herzustellen.

- Zunächst benennen wir alle gebundenen Variablen um. Ein einfacher Ansatz ist, diese durchzunummerieren, also aus x wird x_1, x_2, usw. Das liefert

$$F \equiv \Big(\forall x_1 \exists y_1 \big(R(x_1,y_1) \to \exists r_1 R(r_1, f(y_1,z))\big) \land \forall x_2 \neg \exists z_1 \big(P(z_1) \land \forall w_1 R(x_2,w_1)\big)\Big).$$

- Als Nächstes ersetzen wir alle syntaktischen Abkürzungen wie $\to$ und $\leftrightarrow$ durch die Basissyntax, die nur aus $\land$, $\lor$ und $\neg$ besteht. Wir erhalten

$$F \equiv \Big(\forall x_1 \exists y_1 \big(\neg R(x_1,y_1) \lor \exists r_1 R(r_1, f(y_1,z))\big) \land \forall x_2 \neg \exists z_1 \big(P(z_1) \land \forall w_1 R(x_2,w_1)\big)\Big).$$

- Die Quantoren lassen sich nun einfach "über $\land$, $\lor$ und $\neg$ ziehen", wobei wir dazu die Äquivalenzen $\forall x F \equiv \neg \exists x \neg F$ und $\exists x F \equiv \neg \forall x \neg F$ verwenden. Das liefert

$$F \equiv \forall x_1 \exists y_1 \exists r_1 \forall x_2 \forall z_1 \exists w_1 \Big(\big(\neg R(x_1,y_1) \lor R(r_1, f(y_1,z))\big) \land \big(\neg P(z_1) \lor \neg R(x_2,w_1)\big)\Big).$$

Der Algorithmus zum Herstellen der Skolemform auf Folie 334 ist ebenfalls induktiv formuliert. Wir verwenden auch hier wieder einen globalen Ansatz, wir führen also alle Ersetzungen der existenziellen Quantoren parallel aus. Wir erhalten die Skolemform

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall z_1 \left[\begin{array}{r} \big(\neg R(x_1, f_{y_1}(x_1)) \lor R(f_{r_1}(x_1), f(f_{y_1}(x_1), z))\big) \\ \land \big(\neg P(z_1) \lor \neg R(x_2, f_{w_1}(x_1, x_2, z_1))\big) \end{array}\right].$$