Universität Siegen
Lehrstuhl Theoretische Informatik
Markus Lohrey

Übungsblatt 13

Aufgabe 1. Betrachten Sie folgende Eigenschaften einer binären Relation R.

- R ist nicht leer.
- R ist reflexiv.
- R ist symmetrisch.
- R ist transitiv.

(a) Formulieren Sie jede dieser Eigenschaften als Formel.

(b) Geben Sie zu jeder Formel ein Modell an.

Lösung.

(a) Die gegebenen Eigenschaften lassen sich etwa wie folgt formulieren.

- $\exists x \exists y R(x,y)$
- $\forall x R(x,x)$
- $\forall x \forall y (R(x,y) \to R(y,x))$
- $\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z))$

(b) Die Struktur $\mathcal{A}$ mit $U_{\mathcal{A}} = \{0\}$ und $R^{\mathcal{A}} = \{(0,0)\}$ ist ein Modell aller vier Formeln.

Aufgabe 2. Überführen Sie die Formeln jeweils in eine erfüllbarkeitsäquivalente Aussage in Klauselform. Gehen Sie dabei wie in der Vorlesung (siehe Folie 350) beschrieben vor.

(a) $F = \forall y(\forall x R(x) \to Q(y,z)) \wedge \forall x P(x)$

(b) $G = \forall z(\exists y \neg(R(y) \vee \forall x R(x)) \vee \forall x Q(z,w))$

Lösung. Auf Blatt 12 wurde bereits eine Formel zunächst in BPF und anschließend in Skolemform umgewandelt. Zusätzlich dazu müssen wir nun eine erfüllbarkeitsäquivalente Aussage, also eine Formel ohne freie Variablen konstruieren. Dafür ersetzen wir jede freie Variable durch eine neue Konstante. Schließlich muss die neue Formel in Klauselform gebracht werden, d.h. die Matrix der Formel muss in KNF umgeformt werden.

(a) **Bereinigen:** $\forall y_1(\forall x_1 R(x_1) \to Q(y_1,z)) \wedge \forall x_2 P(x_2)$

Freie Variablen ersetzen: $\forall y_1(\forall x_1 R(x_1) \to Q(y_1,a_z)) \wedge \forall x_2 P(x_2)$

Pränexform:

- Grundform mit $\wedge,\vee,\neg$: $\forall y_1(\neg\forall x_1 R(x_1) \vee Q(y_1,a_z)) \wedge \forall x_2 P(x_2)$
- Reinziehen von $\neg$: $\forall y_1(\exists x_1 \neg R(x_1) \vee Q(y_1,a_z)) \wedge \forall x_2 P(x_2)$
- Quantoren nach vorne: $\forall y_1 \exists x_1 \forall x_2((\neg R(x_1) \vee Q(y_1,a_z)) \wedge P(x_2))$

Skolemform: $\forall y_1 \forall x_2((\neg R(f_{x_1}(y_1)) \vee Q(y_1,a_z)) \wedge P(x_2))$

Klauselform: Die Formel ist bereits in Klauselform.

(b) **Bereinigen:** $\forall z_1(\exists y_1 \neg(R(y_1) \vee \forall x_1 R(x_1)) \vee \forall x_2 Q(z_1, w))$

Freie Variablen ersetzen: $\forall z_1(\exists y_1 \neg(R(y_1) \vee \forall x_1 R(x_1)) \vee \forall x_2 Q(z_1, a_w))$

Pränexform:

- Grundform mit $\wedge$,$\vee$,$\neg$: Die Formel ist bereits in Grundform.
- Reinziehen von $\neg$: $\forall z_1(\exists y_1(\neg R(y_1) \wedge \exists x_1 \neg R(x_1)) \vee \forall x_2 Q(z_1, a_w))$
- Quantoren nach vorne: $\forall z_1 \exists y_1 \exists x_1 \forall x_2((\neg R(y_1) \wedge \neg R(x_1)) \vee Q(z_1, a_w))$

Skolemform: $\forall z_1 \forall x_2((\neg R(f_{y_1}(z_1)) \wedge \neg R(f_{x_1}(z_1))) \vee Q(z_1, a_w))$

Klauselform: $\forall z_1 \forall x_2((\neg R(f_{y_1}(z_1)) \vee Q(z_1, a_w)) \wedge (\neg R(f_{x_1}(z_1)) \vee Q(z_1, a_w)))$

Aufgabe 3. Gegeben sei die Aussage $F = P(a) \wedge \forall x \big(P(x) \to \big(\neg P(s(x)) \wedge P(s(s(x)))\big)\big)$. Ferner sei mit $\mathcal{F}$ die Menge aller Funktionssymbole in F bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie das Herbrand-Universum $D(\mathcal{F})$.

(b) Geben Sie ein Herbrand-Modell $\mathcal{A}$ für F an. Beschreiben Sie $\mathcal{A}$ in einfachen Worten.

(c) Berechnen Sie die Herbrand-Expansion $E(F')$, wobei F' die Skolemform von F ist.

(d) Geben Sie ein (aussagenlogisches) Modell von $E(F')$ an.

Lösung.

(a) Es gilt $\mathcal{F} = \{a, s\}$. Also ist das Herbrand-Universum gegeben durch

$$D(\mathcal{F}) = \{a, s(a), s(s(a)), \dots\} = \{s^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

(b) Ein Term $s^n(a) \in D(\mathcal{F})$ kann als Darstellung der natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ aufgefasst werden. Dadurch identifizieren wir a mit $0 \in \mathbb{N}$, sowie s mit der Nachfolgerfunktion. Unter dieser Identifikation lässt sich $P(x)$ nur als "x ist gerade" interpretieren.

Wir definieren also $U_{\mathcal{A}} = D(\mathcal{F})$, $a^{\mathcal{A}} = s^0(a)$ und $s^{\mathcal{A}}(s^n(a)) = s^{n+1}(a)$ für $n \in \mathbb{N}$, sowie $P^{\mathcal{A}} = \{s^{2n}(a) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $\mathcal{A}$ Herbrand-Struktur und es gilt $\mathcal{A} \models F$.

(c) Zunächst müssen wir die Formel F in ihre Skolemform überführen. Diese ist

$$F' = \forall x \big(P(a) \wedge \big(\neg P(x) \vee \big(\neg P(s(x)) \wedge P(s(s(x)))\big)\big)\big).$$

Sei nun $\mathcal{F}'$ die Menge der Funktionssymbole aus F'. Offensichtlich gilt $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ und folglich ist auch $D(\mathcal{F}') = D(\mathcal{F})$. Wir erhalten als Herbrand-Expansion dann

$$E(F') = \{P(a) \wedge \big(\neg P(s^n(a)) \vee \big(\neg P(s^{n+1}(a)) \wedge P(s^{n+2}(a))\big)\big) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

(d) Sei $\mathcal{B}$ die Belegung, die auf $D(\mathcal{F})$ definiert ist durch

$$\mathcal{B}(P(s^n(a))) = \begin{cases} 1 & (n \bmod 2 = 0) \\ 0 & (n \bmod 2 = 1). \end{cases}$$

Dann gilt $\mathcal{B} \models E(F')$, denn $\mathcal{B}(P(a)) = 1$ und wenn $\mathcal{B}(P(s^n(a))) = 1$, dann folgt stets auch $\mathcal{B}(P(s^{n+1}(a))) = 0$ und $\mathcal{B}(P(s^{n+2}(a))) = 1$.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie jeweils zu der gegebenen unerfüllbaren Aussage F, die bereits in Skolemform ist, die zugehörige Herbrand-Expansion $E(F)$. Geben Sie anschließend eine unerfüllbare Formel der Form $F_1 \wedge \cdots \wedge F_n$ mit $F_1, \ldots, F_n \in E(F)$ an.

(a) $\forall x(P(x) \wedge \neg P(x))$ (b) $\forall x \forall y((\neg P(x) \vee \neg P(f(y))) \wedge P(f(f(x))))$

Lösung. Im folgenden sei mit F die jeweilige Aussage bezeichnet, sowie mit $\mathcal{F}$ die Menge aller Funktionssymbole, die in der Aussage F vorkommen.

(a) Es gilt $\mathcal{F} = \emptyset$. Da $\mathcal{F}$ keine Konstante enthält, muss für das Herbrand-Universum eine neue, fest gewählte Konstante hinzugenommen werden (siehe Folie 359). Wird diese Konstante mit a bezeichnet, so erhalten wir $D(\mathcal{F}) = D(\mathcal{F} \cup \{a\}) = \{a\}$. Die Herbrand-Expansion von F ergibt sich zu $E(F) = \{P(a) \wedge \neg P(a)\}$.

Die Formel $F_1 \in E(F)$ mit $F_1 = P(a) \wedge \neg P(a)$ ist unerfüllbar: Für jede passende Struktur $\mathcal{B}$ gilt $\mathcal{B} \models P(a)$ oder $\mathcal{B} \models \neg P(a)$, aber nie beides und somit $\mathcal{B} \not\models F_1$.

(b) Es gilt $\mathcal{F} = \{f\}$. Wir müssen wieder die fest gewählte Konstante a hinzunehmen und erhalten dann $D(\mathcal{F}) = D(\mathcal{F} \cup \{a\}) = \{f^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Somit ergibt sich die Herbrand-Expansion von F zu

$$E(F) = \{(\neg P(f^n(a)) \vee \neg P(f^{m+1}(a))) \wedge P(f^{n+2}(a)) \mid n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Wir betrachen nun die Formeln $F_1, F_2 \in E(F)$ mit

$$F_1 = (\neg P(f^2(a)) \vee \neg P(f^2(a))) \wedge P(f^4(a)) \equiv \neg P(f^2(a)) \wedge P(f^4(a)),$$
$$F_2 = (\neg P(a) \vee \neg P(f(a))) \wedge P(f^2(a)).$$

Sei $\mathcal{B}$ eine zu $F_1 \wedge F_2$ passende Struktur. Falls $\mathcal{B} \models F_2$, dann $\mathcal{B} \models P(f^2(a))$ und somit $\mathcal{B} \not\models F_1$, also $\mathcal{B} \not\models F_1 \wedge F_2$. Falls hingegen $\mathcal{B} \not\models F_2$, dann gilt natürlich ebenfalls $\mathcal{B} \not\models F_1 \wedge F_2$. Wir können also schließen, dass $F_1 \wedge F_2$ unerfüllbar ist.